دايره هاي اطمينان براي داده هاي رتبه اي

داود شاهسوني[١]

چكيده

براي طرح بلوك كامل تصادفي و طرح بلوكي ناقص متعادل در شرايطي كه داده ها رتبه اي باشند، آزمونهاي دوربين[٢] و فريدمن[٣] فرضيه عدم تفاوت بين تيمارها را آزمون مي‌كنند. با اين‌شرايط دراين مقاله آثاري چون آثار خطي (ميانگين) و آثار درجه دوم تعريف مي‌شوند. اين دو اثر به‌طور همزمان براي ايجاد دايره هاي اطمينان به كارمي‌روند. اگر بلوك‌ها، در واقع همان مصرف‌كننده هايي باشند كه به فرآورده ها رتبه مي‌دهند، تفاوت در آثار درجه دوم مي‌تواند نشان دهنده اين باشد كه مصرف كننده ها، تفاوتي بين اين فرآورده ها قائل هستند و بايد اين موضوع در فروش فرآورده ها مورد توجه قرار گيرد. ضمناً تفاوت در آثار خطي به معناي متفاوت بودن ميانگين رتبه اي فرآورده ها است.

مقدمه

دادن رتبه به فرآورده ها به منظور مقايسة آنها، عملي متداول و معمول است. عموماً روشهاي آماري اين رتبه‌ها را به منظور تحقيق در مورد اينكه آيا تفاوت بين فرآورده ها ناشي از عوامل تصادفي است يا خير، مورد استفاده قرار مي‌دهند.

---

١) عضو هيئت علمي گروه رياضي دانشگاه شاهرود
٢) Durbin (1951) (رجوع شود به ضميمه ١ يا آمار ناپارامتري كاربردي تاليف كنوورترجمه سيدمقتدي هاشمي‌پرست)
٣) Friedman (رجوع شود به ضميمه ١ يا آمار ناپارامتري كاربردي)

دایره‌هاي اطمینان براي داده‌هاي رتبه‌اي
گزیده مطالب آماري -٥٤

مروري تاریخي نشان مي‌دهد که، *اندرسن*[۱] روشي را پیشنهاد نمود که درآن، t فرآورده بر اساس رتبه‌هاي داده شده از سوي n مصرفکننده، مقایسه مي‌شدند. روش مذکور دقیقاً وابسته به آزمون کلاسیك پیرسون، کي دو، در جدول $t \times t$ است (آزمون مقایسه فراوانیهاي نظري و مشاهده شده با آماره) $\sum_i \sum_j \frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}$. وي پیشنهاد کرد که این آمارة آزمون مي‌تواند به عواملي تجزیه شود تا اطلاعات بیشتري راجع به مقایسة فرآورده‌ها بدست آید. (شرح مختصر این آماره را در ضمیمه ۲ ملاحظه فرمائید.)

بست[۲] بیان کردکه چنین تجزیه‌اي براي مقایسة میانگین تیمارها در انطباق با آزمون فریدمن است و علاوه بر آن آماره جدیدي براي مقایسة آثار پراکندگیها یا آثار درجة دوّم را نتیجه مي‌دهد.

اسکج[۳]، نظریة توزیع مجانبي براي آماره اَندرسن را مورد بحث قرار داد و آن را به طرحهاي بلوکي ناقص متعادل تعمیم داد. دراین مقاله تجزیه پیشنهادي بِست به منظورمقایسه و گروه‌بندي فرآورده‌ها از طریق ارائه ***دایره‌هاي اطمینان*** مورد بحث قرار گرفته است.

تعاریف

فرض کنید n مصرف کننده به هر یك از t فرآورده، رتبه‌هاي متمایز ۱،۲، ...، k مي‌دهند. یعني تعداد رتبه‌ها برابر با k فرض مي‌شود. در این صورت ماتریس $N_{t\times k}$ را چنان تعیین مي‌کنیم که N_{ij} ، درایه (i,j) ماتریس، تعداد مصرف کننده‌هایي باشد که به فرآورده i رتبه j را نسبت داده‌اند. واضح است که اگر $k=t$ آنگاه رتبه‌ها از ۱ تا t خواهند بود و

(۱ Anderson(1959)
(۲ Best(1993)
(۳ Schach (1979)

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{k} N_{ij} = n\,t \quad , \quad \sum_{j=1}^{k} N_{ij} = n$$.

اگر $k < t$ یعني اگر تعداد فرآورده‌ها بیشتر از تعداد رتبه‌ها باشد ، عدد n را به گونه‌اي انتخاب مي‌کنیم که هرفرآورده بتواند به تعداد مساوي و برابر با r دفعه رتبه دریافت کند ($r = \frac{nk}{t}$) که در این وضعیت داریم:

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{k} N_{ij} = r\,t \quad , \quad \sum_{j=1}^{k} N_{ij} = r$$

در صورتي که بین فرآورده ها تفاوتي را قایل نباشیم (فرضیه صفر) انتظار داریم $N_{ij} = \frac{r}{k}$. اسکچ نشان داد که بافرض صحت H_0 ، آمارة $A = \left\{\frac{(t-1)}{t}\right\} X_p^2$ به طور مجانبي داراي توزیع کي دو با $(k-1)(t-1)$ درجه آزادي است که X_p^2 همان آمارة معروف پیرسون کي دو جهت آزمون یکنواخت بودن توزیع رتبه‌هاي t فرآورده مي‌باشد، (اگر $k = t$ آنگاه با آماره اندرسن مواجهیم). اکنون X_p^2 را به منظور انعکاس بیشتر مقایسه فرآوردها، به اجزاء کوچکتري تقسیم مي‌کنیم. براي $k > 2$ ورتبه هاي $j = 1,2,\ldots,k$ تعریف مي‌کنیم :

$$g_1(j) = \sqrt{\frac{12}{k^2-1}}\left(j - \frac{k+1}{2}\right)$$

$$g_2(j) = \sqrt{\frac{180}{(k^2-1)(k^2-4)}}\left\{\left(j - \frac{k+1}{2}\right)^2 - \frac{k^2-1}{12}\right\}$$

با فرض $r=\frac{nk}{t}$ ، از اين‌كه $g_1(j)$ بر حسب j خطي است لذا **اثر خطي**[١] رتبه‌هاي i امين فرآورده، M_i، را به صورت زيرتعريف مي‌كنيم:

$$M_i=\sqrt{\frac{t-1}{rt}}\sum_{j=1}^{k}N_{ij}g_i(j)$$

و به طور مشابه چون $g_2(j)$ عبارتي درجه دو برحسب j است لذا **اثر درجة دوّم**[٢] براي i امين فرآورده توسط رابطة زير تعريف مي‌شود:

$$V_i=\sqrt{\frac{t-1}{rt}}\sum_{j=1}^{k}N_{ij}g_2(j)$$

مي‌توان نشان داد كه:

$$A=\sum_{i=1}^{t}M_i^2+\sum_{i=1}^{t}V_i^2+\text{جملاتي با مراتب بالاتر}$$

توجه كنيد كه V_i ها آثار درجه دوم رتبه‌ها هستند اما واريانس نيستند و مي‌توانند منفي نيز باشند.
از آنجا كه رتبه‌ها اعداد صحيح $1,2,\ldots,k$ هستند لذا در شرايطي كه تفاوتي بين فرآورده‌ها نباشد توزيع رتبه‌ها، يكنواخت با ميانگين $\frac{k+1}{2}$ و واريانس $\frac{k^2-1}{12}$ است. با نگاهي به تعريف مي‌بينيم كه M_i دربردارنده اختلاف بين ميانگين نمونه‌اي رتبه‌هاي فرآورده iام و مقدار مورد انتظار آن بافرض يكنواخت بودن توزيع رتبه‌هاست. به طور مشابه، V_i نيز تفاوت بين واريانس نمونه‌اي رتبه‌هاي فرآورده i ام و مقدار مورد انتظار واريانس البته با فرض يكنواخت بودن توزيع رتبه‌ها مي‌باشد. مقادير ثابت

---

(١) Linear effect
(٢) Quadratic effect

$$\sqrt{\frac{180}{(k^2-1)(k^2-4)}} \quad , \quad \sqrt{\frac{12}{(k^2-1)}}$$

طوری انتخاب شده‌اند که $g_2(j), g_1(j)$ به منظور تعیین توزیع M_i و توزیع V_i بتوانند به صورت نرمال استاندارد درآیند. داریم

$$\sum_{j=1}^{k} g_1^2(j) = \sum_{j=1}^{k} g_2^2(j) = k$$

زیرا

$$\sum_{j=1}^{k} g_1^2(j) = \sum_{j=1}^{k} \frac{12}{k^2-1}\left(j - \frac{k+1}{2}\right)^2 = \frac{12}{k^2-1}\sum_{j=1}^{k}\left(j^2 + \frac{(k+1)^2}{4} - (k+1)j\right)$$

$$= \frac{12}{k^2-1}\left(\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{k(k+1)^2}{4} - \frac{(k+1)^2 k}{2}\right) = k$$

مقادیر متغیر تصادفی M_i یعنی m_i ها، فرآورده‌ها را برطبق میانگین رتبه‌ای آنها مجزا می‌سازند. v_i ها که مقادیر متغیر تصادفی V_i می باشند، اگر منفی بوده و از لحاظ قدر مطلق کوچك باشند مبین این مطلب هستند که رتبه‌بندی نمونه‌ای به صورت فشرده در اطراف فرآورده رتبه میانی انجام شده و اگر v_i ها مثبت و بزرگ باشند معنایش این است که یا این رتبه‌ها در یکی از دو حد ابتدا و انتها قرار دارند و یا به صورت دو دسته بطور فشرده در اطراف بالاترین و پایین‌ترین رتبه گرد آمده‌اند. اگر رتبه‌ها حول یك مقدار معین واقع باشند نشان دهنده این است که افراد در مورد رتبه آن کالا نظر یکسانی دارند و اگر به صورت دو دسته انبوه حول دو مقدار باشند، باید جهت فروش، فرآورده‌ها را از لحاظ مرغوبیت تقسیم‌بندی نمود.

دایره های اطمینان

می‌توان نشان داد که اگر طرح بلوکی تصادفی شده بکار رود، آنگاه:

$$M_1^2 + M_2^2 + \mathrm{K} + M_t^2 = F$$

که F آماره رتبه‌ای فریدمن است. برای طرح بلوکی ناقص متعادل، مجموع مربعات آثار خطی فرآورده‌ها، آماره‌ای است

به نام D كه همان آمارة رتبه‌اي دوربين ناميده مي‌شود. (براي شرح موارد مذكور به ضميمه ۱ رجوع شود) آماره هاي F,D به طور مجانبي داراي توزيع كي دوبا $(t-1)$ درجه آزادي هستند و بنابر اين هر دو آماره بطور مجانبي داراي ميانگين $(t-1)$ مي باشد. با استفاده از خاصيت يكا متعامدي بردارهاي g_2,g_1 ، مي توان براي هر i نشان داد كه (ضميمه ۳ را ببينيد)

$$E[M_i]=E[V_i]=0$$
$$E(M_iV_i)=\operatorname{cov}(M_i,V_i)=corr(M_i,V_i)=0$$

به طور مجانبي در حالتي كه تفاوتي بين فرآورده‌ها موجود نيست داريم:

$$E(M_1^2+\Lambda+M_t^2)=E(V_1^2+\Lambda+V_t^2)=t-1$$

كه از اين رابطه مي‌توان نتيجه گرفت كه براي هر i:

$$E(M_i^2)=E(V_i^2)=\frac{t-1}{t}$$

$$Var(M_i)=Var(V_i)=\frac{t-1}{t}$$

پس به طور مجانبي

$$\left[\sqrt{\frac{t}{t-1}}(M_i-0)\right]^2\sim\chi^2_{(1)}\qquad\left[\sqrt{\frac{t}{t-1}}(V_i-0)\right]^2\sim\chi^2_{(1)}$$

نتيجه اينكه، دايره اطمينان تقريبي براي (M_i,V_i) مي‌تواند توسط نقاط درصدي توزيع كي دوبادو درجه آزادي بيان شود. اگر نقطة درصدي را c بناميم، آنگاه دايره اطمينان براي يك مقدار خاص (M_i,V_i) يعني (m_i,v_i) توسط معادله زير داده مي‌شود:

$$(x-m_i)^2+(y_i-v_i)^2=c^2\frac{t-1}{t}$$

در جدول ١ با انتخاب t و سطح اطمينان α، مي‌توان مقدار c متناظر را بدست آورد تا بر اين اساس شعاع دايره اطمينان α درصدي يعني $\sqrt{c^2\frac{t-1}{t}}$ محاسبه شود. مفروضات جدول ١ بدين صورت بدست آمده اند كه تعداد $n=20$ جايگشت به تصادف از اعداد $t\,,1,\ldots$ شبيه‌سازي و مقادير v_1,m_1 محاسبه شده اند. اين عمل ١٠٠٠٠بار انجام شده لذا با توده اي از نقاط (m,v) روبرو هستيم. از آنجا كه تحت فرضً تفاوتي بين فرآورده ها موجود نيست : H_0 داريم $E(m_1)=E(v_1)$ لذا با در نظر گرفتن دايره اي به مركز مبدأ مختصات وشعاع $\sqrt{c^2\frac{t-1}{t}}$، درصد نقاطي (از ١٠٠٠٠ نقطه)كه خارج از اين دايره واقع و در رابطه $m_1^2+v_1^2>c^2(\frac{t-1}{t})$ صدق مي‌كنند به نام p محاسبه شده اند. لازم به توضيح است كه بر اي ساير مقادير n نيز مي توان به همين صورت عمل نمود و مقادير c مورد نياز را به دست آورد.

جدول ١ – در صدي (p) از ١٠٠٠٠ نقطة شبيه‌سازي (m_i,v_i) كه خارج از دايره اطمينان در سطح α واقع مي‌باشد

$\alpha(\%)$	t	c	$p(\%)$
١	٤	٣/٠٣٥	٠/٩٦
١	٨	٣/٠٣٥	١/١٠
١	١٢	٣/٠٣٥	١/٠٨
١٠	٤	٢/١٤٦	١٠/٣٤

١٠	٨	٢/١٤٦	٩/٥٥	
١٠	١٢	٢/١٤٦	١٠/٤١	
٥٠	٤	١/١٧٧	٥١/٤٩	
٥٠	٨	١/١٧٧	٥٠/٥٤	**(١)**
٥٠	١٢	١/١٧٧	٥٠/٤٦	

کاربردها

مثال ١ - رتبه‌بندي‌سيگارها: جدول (٢) حاوي رتبه هايي استكه ٢٠مصرف‌كننده به ٨سيگارنسبت داده اند.

جدول ٢- رتبه سيگارها

رتبه									رتبه								
مصرف كننده	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	مصرف كننده	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
١	٢	٥	٨	٦	٣	٤	٧	١	١١	٦	٧	١	٥	٤	٢	٨	٣
٢	١	٥	٨	٤	٦	٣	٧	٢	١٢	٣	١	٢	٤	٦	٥	٨	٧
٣	١	٥	٧	٣	٦	٤	٨	٢	١٣	٨	١	٧	٦	٥	٣	٤	٢
٤	٤	٢	٥	٦	١	٧	٨	٣	١٤	٣	١	٦	٢	٤	٥	٨	٧
٥	١	٤	٢	٦	٣	٧	٨	٥	١٥	٣	١	٦	٤	٢	٥	٨	٧
٦	١	٧	٥	٤	٢	٦	٨	٣	١٦	٣	١	٦	٢	٥	٤	٨	٧
٧	٤	١	٢	٣	٦	٥	٧	٨	١٧	٨	٥	٤	٢	١	٣	٦	٧
٨	٤	١	٢	٣	٥	٧	٦	٨	١٨	١	٧	٢	٨	٤	٥	٦	٣
٩	٣	٢	١	٤	٦	٥	٨	٧	١٩	٣	٨	٢	٥	٤	٧	٦	١
١٠	٤	١	٧	٣	٢	٥	٨	٦	٢٠	١	٦	٢	٥	٤	٣	٨	٧

بر اساس اين داده ها، ماتريس N را به صورت زير تشكيل مي دهيم:

$$N=\begin{bmatrix}6&1&6&4&0&1&0&2\\8&2&0&1&4&1&3&1\\2&7&0&1&2&3&3&2\\0&3&4&5&3&4&0&1\\2&3&2&5&3&5&0&0\\0&1&4&3&7&1&4&0\\0&0&0&1&0&4&3&12\\2&3&4&0&1&1&7&2\end{bmatrix}$$

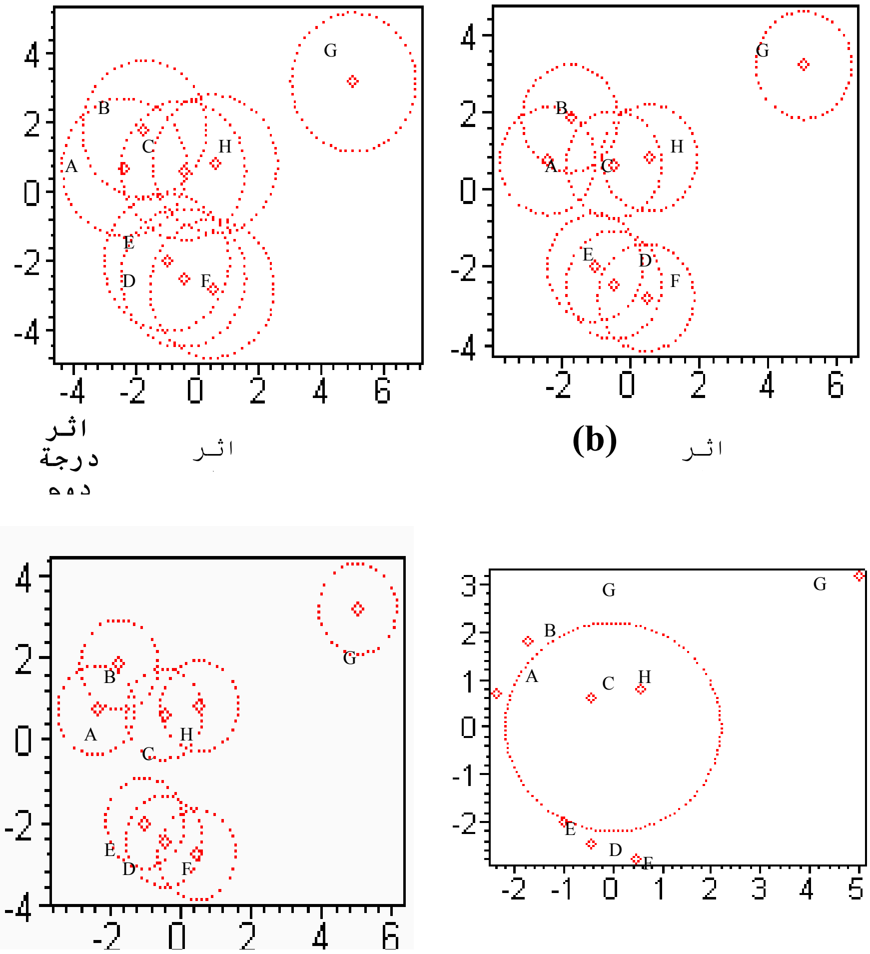
مثلاً $N_{52}=3$ براساس جدول ۲، به اين صورت محاسبه شده كه سه مصرفكننده رتبه ۲ را به سيگار نوع پنجم، E، نسبت داده‌اند. مقادير g_1 ، g_2 و (m,v) ، براي هشت نوع سيگار H,K,A به شرح زير محاسبه شده‌اند:

i, j	$g_1(j)$	$g_2(j)$	m_i	v_i
۱	-۱/۵۲۷۵۲۵	۱/۵۲۷۵۲۵	-۲/۳۷	۰/۷۳
۲	-۱/۰۹۱۰۸۹	۰/۲۱۸۲۱۸	-۱/۷۳	۱/۸۳
۳	-۰/٦٥٤٦٥٤	۰/٦٥٤٦٥٤ -	-۰/٤٦	۰/٦٤
٤	-۰/۲۱۸۲۱۸	۱/۰۹۱۰۸۹ -	-۰/٤٦	-۲/٤٦
٥	۰/۲۱۸۲۱۸	۱/۰۹۱۰۸۹ -	-۱/۰	-۲/۰۱
٦	۰/٦٥٤٦٥٤	۰/٦٥٤٦٥٤ -	۰/٤٦	-۲/۷٤
۷	۱/۰۹۱۰۸۹	۰/۲۱۸۲۱۸	٥/۰۲	۳/۲
۸	۱/٥۲۷٥۲٥	۱/٥۲۷٥۲٥	۰/٥٥	۰/۸۲

به سادگی می‌توان دید $\sum_{j=1}^{8} g_1(j)g_2(j)=0$ ، که نتیجه متعامد بودن دو بردار $g_{2,}g_1$ است. هر یک از زوج های (m,v)، مرکزدایره اطمینان مربوط به یکی از سیگارهاست که شعاع این دایره ها بر اساس رابطه (۱) وابسته به مقدار c است و بر اساس جدول (۱) مقادیر c طی یک شبیه‌سازی بر حسب α محاسبه شده اند. اشکال ۱ـ(a) تا ۱-(c) به ترتیب نشان دهنده دایره های اطمینان با α مساوی با ۰/۱، ۰/۲، ۰/۵ برای هشت نوع سیگار مذکورهستند. انتخاب α تا حدی دلخواه بوده
و در عین حال مبنایی مناسب برای مقایسه نمودارها می‌باشد. و بدین ترتیب سعی شده است که تمایز بین سه گروه $\{D,E,F\},\{A,B,C,H\},\{G\}$مشخص شود. تمایز دو گروه آخربا در نظر گرفتن محور آثار درجه دوم صورت گرفته است و این امکان وجود نداردکه محورآثار خطی رابرای جدا سازی به کار بریم. می‌توان چنین استنباط کردکه نظرعامه مصرف کنندگان براین است که رتبه سیگار نوع G نا چیز و غیر موثر بوده و سیگارهای F,E,D به طور متوسط هم رتبه اند. بر اساس موقعیت H,C,B,A در این نمودارها، می‌توان در مورد این نوع سیگارها، علی رغم اینکه تقریباً هم رتبه هستند تفاوتی را قائل شد. شکل۱-(d) یک دایره اطمینان $\alpha = ۰/۰۵$ حول مبدا مختصات را نشان می‌دهد. اساساً یک تست دو بعدی معنی داری در این حالت نشان دهنده این است که اگر تعریف کنیم:

H_0 : بین فرآور ده ها تفاوتی وجود ندارد

آنگاه موقعیت فرآورده G در نمودار حاکی از رد این فرضیه می‌باشد.



اثـر درجة دوم

اثـر

(b) اثـر

(c) اثـر خطی

(d) اثـر خطی

شکل

مثال ٢ ـ رتبه بندي مواد شوینده
جدول زیر حاوي رتبه‌هایي است كه ٣٠ مشتري بر اساس خاصیت نرم كنندگي به ١٠ ماده شوینده نسبت داده‌اند، در این مسئله به دلائلي، هر مشتري فقط به چهار ماده شوینده رتبه داده است طوري كه طرح بلوك ناقص متعادل ایجاد شود. ملاحظه كنید كه هر یك از فرآورده‌ها به دفعات مساوي و برابر با ١٢ دفعه رتبه دار شده است.

جدول ٣-رتبه مواد شوینده :

رتبه ها	فرآورده ها	مشتري	رتبه ها	فرآورده ها	مشتري
٤و٢و ١و٣	A,B,C,D	١٦	٤و٣و ٢و١	A,B,C,D	١
٤و٣و ٢و١	A,B,E,F	١٧	٤و٢و ٣و١	A,B,E,F	٢
١و٣و ٤و٢	A,C,G,H	١٨	١و٢و ٤و٣	A,C,G,H	٣
٢و١و ٤و٣	A,D,I,J	١٩	٢و١و ٣و٤	A,D,I,J	٤
٤و٢و ٣و١	A,E,G,I	٢٠	٤و١و ٣و٢	A,E,G,I	٥
١و٢و ٤و٣	A,F,H,J	٢١	٢و١و ٤و٣	A,F,H,J	٦
٢و٤و ٣و١	B,C,F,I	٢٢	٣و٤و ٢و١	B,C,F,I	٧

٢و٣و ٤و١	B,D,G,J	٢٣	١و٣و ٢و٤	B,D,G,J	٨
٣و٤و ٢و١	B,E,H,J	٢٤	٢و٤و ٣و١	B,E,H,J	٩
٢و٣و ٤و١	B,G,H,I	٢٥	١و٤و ٢و٣	B,G,H,I	١٠
٤و٢و ٣و١	C,E,I,J	٢٦	٢و٣و ٤و١	C,E,I,J	١١
٣و٤و ٢و١	C,F,G,J	٢٧	٣و٤و ٢و١	C,F,G,J	١٢
٤و٢و ٣و١	C,D,E,H	٢٨	٤و٢و ٣و١	C,D,E,H	١٣
١و٣و ٢و٤	D,E,F,G	٢٩	١و٣و ٢و٤	D,E,F,G	١٤
٣و٢و ١و٤	D,F,H,I	٣٠	١و٣و ٢و٤	D,F,H,I	١٥

بر این اساس ماتریس N را به صورت زیر می‌یابیم:

$$N=\begin{Bmatrix} 4 & 2 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & 1 \end{Bmatrix}$$

بنابراين داريم $k=4$; $t=10$; $n=30$

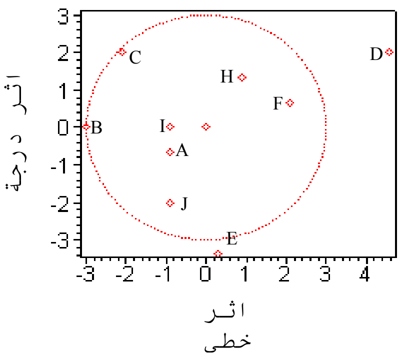
و نتيجه مي‌گيريم كه $r=12$ (توجه كنيد كه مجموع عناصر هر سطر ماتريس برابر 12 ومجموع عناصر هر ستون آن برابر 30 است)

مقادير (m,v) براي اين ١٠ ماده شونده عبارت است از

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_i	-0.9	-3	-2.1	4.5	0.3	2.1	0	0.9	-0.9	-0.9
v_i	-0.67	0	2.01	2.01	-3.35	0.67	0	1.34	0	-2.01

به موقعيت اين نقاط در شكل (٢) و دايره اطمينان مربوط در اندازه $\alpha=0/05$ توجه كنيد.

شكل ٢



دايره هاي اطمينان براي داده هاي رتبه اي

دايره هاي اطمينان نمي توانندبه طور واضح گروه بندي فرآورده ها را نشان دهند، حتي اگر $\alpha = 0/5$ ، فرآورده هاي D, B به ترتيب بالاترين و پايين ترين ميانگين رتبه اي رادارند. ضمناً فرآورده E داراي كمترين اثر درجه دوّم بوده و موقعيت I, G, A حاكي ازتشابه خيلي زياد اين فرآورده ها است. فرآورده C تقريباً خارج از دايره واقع است و نقش آن حاكي از رد فرضية عدم تفاوت بين فرآورده ها مي‌باشد.

رتبه هاي يكسان

اگر رتبه خاصي به بيش از يك فرآورده داده شود (همرتبه وجود داشته باشد) آنگاه به هر يك از اين مقادير،متوسط رتبه هايي را كه درصورت برابرنبودن به آنها نسبت داده مي‌شد، تخصيص مي‌دهيم. اين روش رتبه دهي، **ميان رتبه** نام دارد. به عنوان مثال اگر رتبه هاي ٢،١،٢،٢ به ترتيب به فراورده هاي A, B, C, D نسبت داده شود آنگاه رتبه هاي جديد به ترتيب عبارتند از ٣،١،٣،٣ زيرا اگر فرم برابر نبودن آنها را در نظر بگيريم، به صورت ٢،١،٣،٤ خواهد بود و ميانگين اعداد ٢،٣ و٤ برابر است با ٣. ويا اگر رتبه هاي ٣،٤،١،٤ نسبت داده شود آنگاه با اعمال روش ميان رتبه، آنها به ٣/٥ ،١، ٣/٥ ،٢ تبديل مي‌شوند.

همانند قبل نيز مي‌توان ماتريس N را تعيين نمود اما بر خلاف قبل در اين وضعيت، مجموع عناصر ستون ها با يكديگر مساوي نيست. مشكل ناشي از يكسان بودن رتبه ها آن است كه آماره $(t-1/t)X^2$ براي توزيع مجانبي كي‌دو نيست (براي توضيح بيشتر به مرجع ٧ رجوع كنيد). اما مي‌توان جهت آزمون فرضيه عدم تفاوت بين رتبه ها، مقادير (m_i, v_i) را باتغييرات زير بدست آورد. فرض كنيد $\{x_j\}$ ميان رتبه ها و $\{p_j\}$ ها به صورت زير تعريف شوند:

$$p_{j} = (n_{1j} + \ldots + n_{tj}) / \sum_i \sum_j n_{ij}$$

آنگاه تعريف مي‌كنيم:

$$g_1(j) = B(x_j - S_1)$$

$$g_2(x_j) = C\{x_j^2 - BYg_1(x_j) - S_2\}$$

دایره‌های اطمینان برای داده‌های رتبه‌ای
گزیده مطالب آماری -٥٤
که در آن

$$S_t = \sum_j x_j^t p_j$$

$$B = (S_2 - S_1^2)^{-0/5}$$

$$Y = S_3 - S_1 S_2$$

$$C = (S_{4-} S_2^2 - B^2 Y^2)^{-0/5}$$

منابع:

1. Anderson , R. L. (1959) . Use of contingency tables in consumer preference studies. Biometrics, 15, pp582-590.
2. Baba , Y. (1994) .New approaches based on ranking in sensory evaluation. In New Approaches in Classification and Data Analysis (eds E. Diday , Y. Lechevallier, M. Schader, P. Bertrand and B. Burtschy). New York: Springer.
3. Best , D. J.(1993).Extended analysis for ranked data. Aust. J. Statist. , 35,257-262.
4. Conover, W.J.(1980).Practical non parameteric statistics.New York: Wiley.
5. Fisher, R. A. and Yates, F. (1963). Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research. Edinburgh : Oliver and Boyd.
6. Gacula, M. C. (1993). Design and Analysis of Sensory Optimization. Nutrition Press.
7. Schach, S. (1979). An alternative to the Friedem test with certain optimality properties. Ann. Statist. ,7,pp 537-550.
8. Best D. J. & J. C. W. Rayner. (1997). Product maps for ranked preference data. The Statistication. 46 , No. 3 , pp. 347-356.

طرح بلوک کامل تصادفی

در این طرح آزمایش، k واحد آزمایشی در درون هر بلوک به طور تصادفی با k تیمار مورد بررسی جور می‌شوند به طوری که هر تیمار در درون هر بلوک تنها و تنها یك بار به کار می‌رود.

اما گاهی غیر عملی و حتی غیر ممکن است که تمام تیمارها را برای هر بلوک به کار بریم به ویژه وقتی تعداد تیمارها زیاد و تعداد واحدهای آزمایشی بلوك‌ها محدود است. این گونه طرح آزمایش که در آن همه تیمارها در مورد هر بلوک به کار نرود طرحهای بلوك ناقص نامیده می‌شود.

طرح بلوك ناقص متعادل

در طرح بلوك ناقص، اگر طرح طوری متعادل شود که:
۱- هر بلوك شامل k واحد آزمایش باشد. ۲- هر تیمار در r بلوك ظاهر شود. ۳- هر تیمار در مقایسه با تیمارهای دیگر به دفعات مساوی به کار رود. ٤- هرتیمار در داخل بلوك حداکثر یك بار بکار رود، آنگاه طرح را بلوك ناقص متعادل گویند.

آزمون دوربین و فریدمن

دوربین (Durbin 1951) آزمونی رتبه‌ای برای فرضیه
H_0: عدم تفاوت بین تیمارها در طرح بلوك ناقص متعادل
را عرضه نمود. وقتی تعداد تیمارها برابر تعداد واحدهای مورد آزمایش درداخل هر بلوك باشند این آزمون به آزمون فرید من تبدیل می‌شود.

فرض کنید
t = تعدا د تیمارهائی که آزمایش می‌شوند
k = تعداد واحدهای آزمایش در هر بلوك
b = تعداد کل بلوك‌ها
r= تعداد دفعاتی که هر تیمار ظا هر می‌شود $b<r$

آماره آزمون دوربین – آماره آزمون توزیع دوربین به صورت زیر تعریف می‌شود

دايره‌هاي اطمينان براي داده‌هاي رتبه اي

$$D=\frac{12(t-1)}{rt(k-1)(k+1)}\sum_{i=1}^{t}\left(R_i-\frac{r(k+1)}{2}\right)^2$$

مجموع رتبه‌هاي منسوب به r مقدار مشاهده تحت تا ثير i امين تيمار $= R_i$

قاعده تصميم – فرض صفر را در سطح معني دار بودن تقريبي α رد مي كنيم

اگر، D، آماره آزمون دوربين، از چندك (α) متغير تصادفي كي دو با $(t-1)$ درجه آزادي بيشتر باشد.

اثبات رابطه

$$\sum_{i=1}^{t}M_i^2=D$$

با فرض $M_i=\sqrt{\frac{t-1}{rt}}\sum_{J=1}^{K}N_{ij}g_1(j)$

داريم: $g_1(j)=\sqrt{\frac{12}{k^2-1}}\left(j-\frac{k+1}{2}\right)$

$$\sum_{i=1}^{t}M_i^2=\sum_{i=1}^{t}\left(\frac{t-1}{rt}\right)\left(\sum_{j=1}^{k}N_{ij}g_1(j)\right)^2$$

$$=\left(\frac{t-1}{rt}\right)\sum_{i=1}^{t}\left(\sum_{j=1}^{k}N_{ij}.\sqrt{\frac{12}{k^2-1}}\left(j-\frac{k+1}{2}\right)\right)^2$$

$$=\frac{12(t-1)}{rt(k^2-1)}\sum_{i=1}^{t}\left(\sum_{j=1}^{k}jN_{ij}-\frac{k+1}{2}\sum_{j=1}^{k}N_{ij}\right)^2$$

چون

$$\sum_{j=1}^{k}N_{ij}=\begin{cases} b & \text{درطرح بلوك كامل تصادفي} \\ r & \text{درطرح بلوك ناقص} \end{cases}$$

(تعداد افرادي كه به فرآورده i رتبه j را نسبت داده اند) $\sum_{j=1}^{k}jN_{ij}=\sum j$

(مجموع رتبه‌هایي که افراد به فرآورده i نسبت داده‌اند) =

$$= R_i$$

بنابر این :

$$\sum_{i=1}^{t} M_i^2 = \frac{12(t-1)}{rt(k^2-1)} \sum_{i=1}^{t} \left(R_j - r\frac{k+1}{2} \right)^2 = D$$

موضوع نظریه آزمونهاي دوربین و فرید من تشابه زیادي دارند، توزیع دقیق آماره آزمون دوربین تحت این فرض به دست آمده است که تمام آرایشهاي حاصل از k رتبه در درون هر بلوك به دلیل عدم تفاوت بین تیمارها متساوي الاحتمال است چون هریك ازرتبه ها عددي صحیح بین ۱ تا k است، توزیع رتبه‌ها یکنواخت با میانگین $\frac{k+1}{2}$ و واریانس $\frac{k^2-1}{12}$ است.

پیدا کردن توزیع دقیق در اغلب حالات عملي نیست. اگر تعداد تکرارهاي هر تیمار یعني r بزرگ باشد مجموع رتبه هاي تحت اثر امین تیمار، R_i، بنابر قضیه حدمرکزي تقریباً داراي توزیع نرمال است پس متغیر تصادفي

$$\frac{R_i - E(R_i)}{\sqrt{Var(R_i)}}$$

تقریباً داراي توزیع نرمال استاندارد است. با فرض مستقل بودن R_i ها، آماره

$$D' = \sum_{i=1}^{t} \frac{(R_i - E(R_i))^2}{Var(R_i)}$$

را مي‌توان به صورت مجموع t متغیر تصادفي مستقل کي دو تلقي کرد. درنتیجه توزیع D' مي‌تواند تقریباً کي دو با t درجه آزادي باشد. اما R_i ها مستقل نیستند. چون مجموع انها ثابت است

دايره‌هاي اطمينان براي داده‌هاي رتبه اي

(تعداد کل افرادي که به تيمار j، رتبه داده‌اند)

$$\sum_{i=1}^{t} R_i = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{k} jN_{ij} = \sum_{j=1}^{k} j\sum_{i=1}^{t} N_{ij} = \sum_{j=1}^{k} j$$

$$= \sum_{j=1}^{k} j.n = \frac{nk(k+1)}{2}$$

بنا بر اين معلوم بودن $(t-1)$ تا از R_i ها، ما را قادر مي‌سازد که مقدار R_i بعدي را مشخص کنيم. دوربين (١٩٥١) نشان مي‌دهد که حاصلضرب D' در $\frac{t-1}{t}$ منتج به آماره اي مي‌شود که تقريباً کي دو با $(t-1)$ درجه آزادي، به صورت زير است:

$$D = \frac{t-1}{t} D' = \frac{t-1}{t} \sum_{i=1}^{t} \frac{(R_j - E(R_j))^2}{Var(R_i)}$$

اگر تعريف کنيم:

رتبه اختصاص داده شده توسط فرد (بلوک) j ام به فرآورده (تيمار) i ام $= R_{ij}$

$$R_i = \sum_{j=1}^{r} R_{ij}$$

$$E(R_i) = \sum_{j=1}^{r} E(R_{ij}) = \sum_{j=1}^{r} \frac{k+1}{2} = \frac{r(k+1)}{2}$$

$$Var(R_i) = \sum_{j=1}^{r} Var(R_j) = \sum_{j=1}^{r} \frac{k^2-1}{12} = \frac{r(k^2-1)}{12}$$

پس:

$$D = \frac{t-1}{t}\sum_{i=1}^{t} \frac{(R_i - \frac{r(k+1)}{2})^2}{\frac{r(k^2-1)}{2}} = \frac{12(t-1)}{rt(k^2-1)} \sum_{i=1}^{t} \left(R_i - \frac{r(k+1)}{2}\right)^2$$

که همان آماره دوربين است.

ضميمه ۲

آماره آزمون اندرسن

فرض كنيد n مصرف‌كننده به طور مستقل از ديگري به t فرآورده رتبه دهند. رتبه‌ها متمايز هستند و هر مصرف كننده مي‌تواند به اين r فرآورده، به تعداد $t!$ رتبه دهد. (به عنوان مثال اگر $r=3$ ورتبه‌ها را ۱،۲و۳ درنظر بگيريم آنگاه به فرآورده اول تا سوم مي‌توان يكي از انواع ۳،۲،۱-۲،۳،۱ - ۳،۱،۲ — ۱،۳،۲ — ۳ ،۲،۱ —۳ ،۱،۲ را نسبت داد كه همان جايگشت‌هاي اعداد ۲،۱و۳ هستند). به عبارت ديگر هرمصرف‌كننده بايد همة فرآورده‌ها را درنظرگرفته و كليه رتبه‌ها را اختصاص دهد.

براي $j=1,2,\dots,t$ ، Q_j^2 به صورت زير تعريف مي‌شود.

$$Q_j^2 = \tfrac{r}{n}\sum_i (n_{ij} - n/r)^2$$

كه n_{ij} تعداد دفعاتي است كه رتبه j توسط مصرف كننده i شده است و $\sum_{j=1}^{t} n_{ij} = \sum_{i=1}^{t} n_{ij} = n$. تحت اين فرض كه مصرف‌كنندگان در جامعه، تفاوتي بين فرآورده‌ها قائل

نيستند، Q_j^2 داراي توزيع مجانبي χ^2_{r-1} است. آماره آزمون اندرسن عبارت است از:

$$Q^2 = \sum_{j=1}^{r} Q_j^2$$

كه به دليل مستقل نبودن Q_j^2 ها داراي توزيع كي‌دو با $t(t-1)$ درجه آزادي نيست.

اندرسن ثابت كرد كه $\frac{t-1}{t}Q^2$ به طور مجانبي داراي توزيع كي‌دو با درجه آزادي $(r-1)^2$ است.

در واقع منظور از ***تجزيه*** پيشنهاي اندرسن همان مجموع مذكور است تا بتوان اطلاعات بيشتري راجع به مقايسه فرآورده‌ها بدست آورد.

ضمیمه۳

$$E(M_i)=\sqrt{\frac{t-1}{rt}}E\left(\sum_{j=1}^{k}N_{ij}g_1(j)\right)$$

$$=\sqrt{\frac{t-1}{rt}}E\left(\sum_{j=1}^{k}N_{ij}\sqrt{\frac{12}{k^2-1}}(j-\frac{k+1}{2})\right)$$

$$=\sqrt{C}.E\left(\sum_{j=1}^{k}jN_{ij}-\frac{k+1}{2}\sum_{j=1}^{k}N_{ij}\right)$$

$$=\sqrt{C}.E\left(R_i-\frac{r(k+1)}{2}\right)$$

(با توجه به معلومات ضمیمه ۱ و اینکه طرح مورد نظر بلوك ناکامل متعادل است) ٥ =

که $$C=\frac{t-1}{rt}.\frac{12}{k^2-1}$$